Interpretazione grafica di alcune equazioni e disequazioni irrazionali

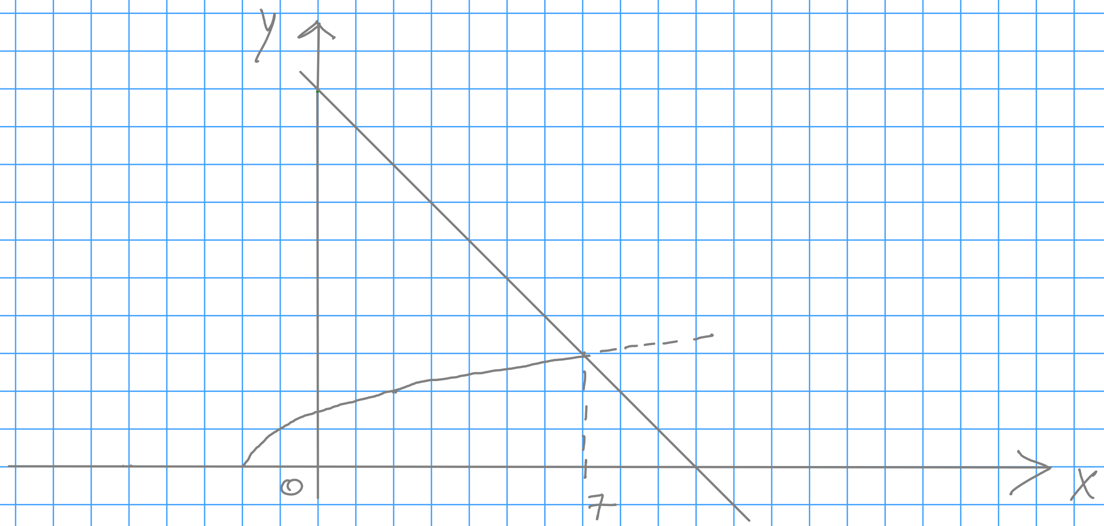
In alcuni casi si possono ottenere le soluzioni delle equazioni e delle disequazioni irrazionali facendo ricorso alla rappresentazione di curve note (rette, coniche) sul piano cartesiano.

Esempio

$$10 - x = \sqrt{2+x}$$

Rappresentiamo sul piano cartesiano le funzioni $y = 10 - x$ e $y = \sqrt{2+x}$

La prima è una retta. La seconda un ramo di parabola (quello positivo), infatti, elevando al quadrato $y = \sqrt{2+x}$ si ottiene $y^2 = 2+x$, $x = y^2 - 2$ (è una parabola con l'asse parallelo all'asse x).



La soluzione dell'equazione è l'ascissa del punto di intersezione delle due curve. Dal grafico si vede che è $x = 7$.

Con i calcoli in effetti si ha:

$$(10 - x)^2 = 2 + x \quad , \quad 100 + x^2 - 20x = 2 + x$$

$$x^2 - 21x + 98 = 0$$

$$x = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 392}}{2} = \frac{21 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{21 \pm 7}{2} = \begin{cases} 7 \\ \cancel{14} \end{cases}$$

(la soluzione $x = 14$ non è accettabile)

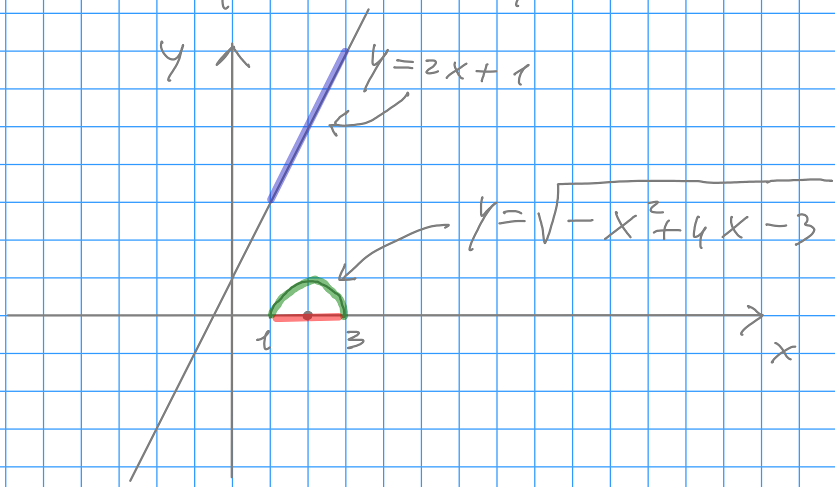
La rappresentazione grafica è utile per risolvere alcuni tipi di disequazioni.

Una disequazione è una disuguaglianza tra due espressioni contenenti un'incognita.

Esempi

1) $2x+1 > \sqrt{-x^2+4x-3}$

Rappresentiamo sul piano cartesiano le curve di equazioni $y=2x+1$ e $y=\sqrt{-x^2+4x-3}$:



La curva $y=\sqrt{-x^2+4x-3}$ è una semicirconferenza di centro $C(2,0)$ e raggio $r=1$, infatti, elevando al quadrato, si ha:

$y^2=-x^2+4x-3$, $x^2+y^2-4x+3=0$

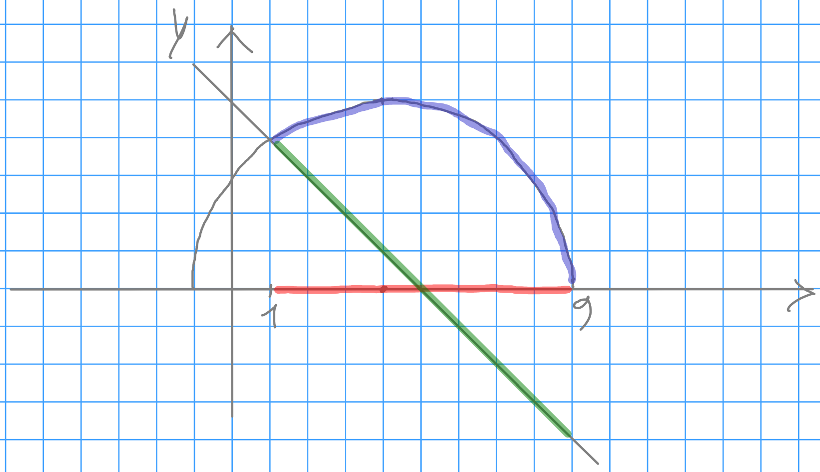
Si vede dal grafico che la disuguaglianza è verificata per tutti i valori di x dell'intervallo $[1,3]$, cioè tali che $1 \leq x \leq 3$.

2) $5-x < \sqrt{9+8x-x^2}$

Rappresentiamo le funzioni $y=5-x$ e $y=\sqrt{9+8x-x^2}$. La prima è una retta, la seconda una semicirconferenza:

$y^2 = 9 + 8x - x^2$, $x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0$

Il centro è $C(4,0)$ e il raggio $r = \sqrt{16+9} = 5$.



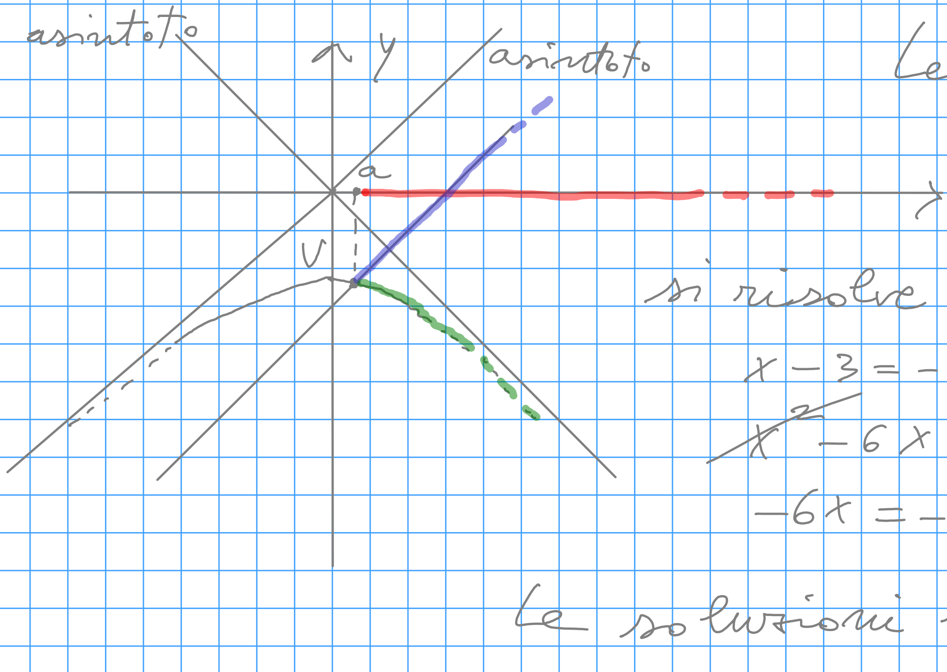
Dal disegno si vede che le soluzioni della disequazione sono i valori di x tali che $1 \leq x \leq 9$.

3) $x - 3 > -\sqrt{x^2+5}$

$y = x - 3$, $y = -\sqrt{x^2+5}$

La prima funzione è una retta, la seconda il ramo negativo di un'iperbole, infatti, elevando al quadrato: $y^2 = x^2 + 5$, $y^2 - x^2 = 5$,

$\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{5} = 1$, è un'iperbole equilatera con il vertice nel punto $V(0, -\sqrt{5})$.



Le soluzioni sono $x > a$. Per trovare a si risolve l'equazione:

$x - 3 = -\sqrt{x^2+5}$

$\cancel{x^2} - 6x + 9 = \cancel{x^2} + 5$,

$-6x = -4$, $x = \frac{2}{3}$

Le soluzioni sono quindi $x > \frac{2}{3}$